



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Matemáticas**

**Escuela Profesional de Matemática**

**Construcción de espacios de recubrimiento sobre un  
espacio topológico**

**TESIS**

**Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática**

**AUTOR**

**Manuel Arturo CAPARACHÍN NUÑEZ**

**ASESOR**

**Alberto Mariano RIVERO ZAPATA**

**Lima, Perú**

**2017**



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Caparachín, M. (2017). *Construcción de espacios de recubrimiento sobre un espacio topológico*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---



# UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS ✓

PROGRAMA DE ACTUALIZACIÓN PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL 2017-I  
MODALIDAD EXAMEN DE SUFICIENCIA PROFESIONAL

## ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

### ACTA DE EXPOSICIÓN DE TESIS

9/12  
32

En la Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 18:30 horas, del día 06 de Julio... del 2017, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador:

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Presidente

Mg. William César Olano Díaz

Miembro

Para la exposición de Tesis titulada: «CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE RECUBRIMIENTO SOBRE UN ESPACIO TOPOLÓGICO» presentada por el Bachiller Manuel Arturo Caparachín Nuñez.

Luego de la exposición de la tesis, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, a las cuales el Bachiller Manuel Arturo Caparachín Nuñez, respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

Hecha la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, el Bachiller Manuel Arturo Caparachín Nuñez mereció la aprobación obteniendo como calificativo promedio y la nota de... Diecisiete (17)... (letras y números).

A continuación los Miembros del Jurado, dan manifiesto que el Bachiller Manuel Arturo Caparachín Nuñez APROBÓ la exposición de la Tesis.

Siendo las 19:30 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente acta en dos (2) copias originales.

Mg. William Cesar Olano Díaz  
MIEMBRO

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro  
PRESIDENTE

# CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE RECUBRIMIENTO SOBRE UN ESPACIO TOPOLÓGICO

MANUEL ARTURO CAPARACHÍN NUÑEZ

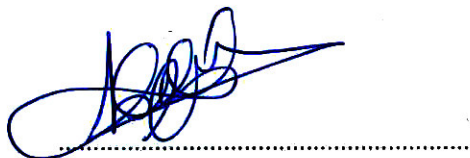
Tesina presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:



Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Presidente



Mg. William Cesar Olano Díaz

Miembro

Lima – Perú

Julio 2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

MANUEL ARTURO CAPARACHÍN NUÑEZ

Construcción de Espacios de Recubrimiento sobre un  
Espacio Topológico. (Lima) 2017.

32 p., 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática,  
2017)

Tesina. Universidad Nacional Mayor de San Marcos,

Facultad de Ciencias Matemáticas. Matemática.

UNMSM / FCM. Título (Serie).

A mi familia, por brindarme el apoyo necesario y suficiente para emprender el presente trabajo.

A la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos

A todos los compañeros de estudio y profesores que mediante sus aportes se esforzaron por transmitirme algo de lo mucho que saben en los diferentes cursos de pre grado; en especial a los profesores: Dr. Pedro Contreras Chamorro y al Dr. Alberto Rivero Zapata por la paciencia y esmero que tuvieron en guiarme en la elaboración de mi tesina, porque su entusiasmo, dedicación y compromiso han sabido contagiarme de las ganas necesarias para seguir aprendiendo más del fascinante mundo de las Matemáticas.

## RESUMEN

### CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE RECUBRIMIENTO SOBRE UN ESPACIO TOPOLÓGICO

MANUEL ARTURO CAPARACHÍN NUÑEZ

JULIO – 2017

Orientador: Dr. Alberto Rivero Zapata

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

---

En el presente trabajo estudiaremos al Grupo Fundamental como herramienta para estudiar la construcción de los espacios de Recubrimiento de un espacio topológico dado, la cual consiste en reducir al problema algebraico de clasificar los subgrupos del Grupo Fundamental del espacio topológico en estudio.

PALABRAS CLAVES.      HOMOTOPÍA DE CAMINOS  
GRUPO FUNDAMENTAL  
ESPACIOS DE RECUBRIMIENTO  
ESPACIO DE RECUBRIMIENTO UNIVERSAL  
TRANSFORMACIÓN RECUBRIDORA.



## ABSTRACT

### CONSTRUCTION OF COATING SPACES OVER A TOPOLOGICAL SPACE

MANUEL ARTURO CAPARACHÍN NUÑEZ

JULY 2017

Advisor: Dr. Alberto Rivero Zapata

Degree Awarded: Bachelor of Mathematics

---

In the present work we will study the Fundamental Group as a tool to study the construction of the Coating spaces of a given topological space, which consists of reducing the algebraic problem of classifying the subgroups of the Fundamental Group of the topological space under study.

KEYWORDS. PATH HOMOTOPY  
FUNDAMENTAL GROUP,  
COATING SPACES  
UNIVERSAL COATING SPACE  
COATING TRANSFORMATION.

## Índice General

Introducción.....	viii
Problemas y objetivos.....	ix
1. Preliminares.....	1
1.1. Homotopía de caminos.....	1
1.2. El Grupo Fundamental.....	3
1.3. Espacios de Recubrimiento.....	5
1.4. El grupo Fundamental del círculo $S^1$ .....	8
2. Construcción de Espacios de Recubrimiento sobre un Espacio Topológico.....	12
2.1. El espacio recubridor universal.....	12
2.2. Transformaciones recubridoras.....	17
2.3. Existencia de espacios recubridores.....	22
2.4. Equivalencia de espacios recubridores.....	27
Conclusiones.....	31
Bibliografía.....	32

## Introducción

El **Grupo Fundamental** de un espacio topológico es una de las herramientas más importantes dentro del campo de la **Topología** para poder distinguir espacios topológicos y sus propiedades (tales como compacidad o conexión), así como para determinar si son homeomorfos o no. Otras aplicaciones del grupo fundamental incluyen teoremas concernientes a puntos fijos así como el conocido **Teorema Fundamental del Álgebra** y el **Teorema de la Curva de Jordan** el cual establece que toda curva cerrada simple  $C$  en el plano separa a éste en dos componentes, siendo  $C$ , la frontera común.

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar y construir los **Espacios de Recubrimiento** (o Espacio Recubridor) de un espacio topológico dado, teniendo al grupo fundamental como herramienta principal, el cual permitirá reducir este problema a uno de tipo algebraico consistente en clasificar los subgrupos del grupo fundamental del espacio topológico en estudio. El presente trabajo consta de dos capítulos, descritos de la siguiente manera:

En el **capítulo 1** se exponen definiciones y resultados importantes que serán útiles para el desarrollo del siguiente apartado, tales como la homotopía de caminos que está vinculado a la definición de grupo fundamental de un espacio topológico, así también se dará a conocer lo que es un espacio de recubrimiento y su aplicación como herramienta para calcular, a modo de ejemplo, el grupo fundamental (no trivial) del círculo.

En el **capítulo 2** se estudiará la construcción de los espacios recubridores de un espacio topológico dado teniendo ahora como herramienta al grupo fundamental. Para su comprensión se detallará el espacio recubridor universal y las transformaciones recubridoras.

## **Problema general**

¿El grupo fundamental constituye una herramienta para construir los espacios de recubrimiento de un espacio topológico?

## **Problema específico**

¿Cómo se efectúa la construcción de los espacios de recubrimiento del espacio topológico dado  $X$  mediante la determinación de todos los subgrupos del grupo fundamental de  $X$ ?

---

## **Objetivo general**

Reducir el problema de construir los espacios de recubrimiento de un espacio topológico dado  $X$  a la clasificación de los subgrupos del grupo fundamental de  $X$ .

## **Objetivo específico**

Construir todos los espacios recubridores del espacio topológico  $X$  mediante la determinación de los subgrupos del grupo fundamental de  $X$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Antes de definir el Grupo Fundamental de un espacio topológico  $X$ , consideraremos una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas definidas en un intervalo cerrado (llamadas *caminos*) sobre el espacio  $X$ , que será de suma importancia en los temas siguientes. En adelante, el intervalo  $[0, 1]$  será denotado por  $I$ . Los resultados y demostraciones presentados son de Munkres [2000], Kosniowski [1986] y Massey [2006].

### 1.1 Homotopía de caminos

**Definición 1.1.1.** Sean  $f$  y  $g$  aplicaciones continuas del espacio  $X$  en el espacio  $Y$ , decimos que  $f$  es **homotópica** a  $g$  si existe una aplicación continua  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que:

$$F(x, 0) = f(x) \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad F(x, 1) = g(x)$$

para cada  $x \in X$ . La aplicación  $F$  se conoce como **homotopía** entre  $f$  y  $g$ . Si  $f$  es homotópica a  $g$ , escribiremos  $f \simeq g$ .

**Definición 1.1.2.** Dos caminos  $f$  y  $g$  que aplican el intervalo  $I$  en  $X$  se dice que son **homotópicos por caminos** si tienen un mismo punto inicial  $x_0$  y un mismo punto final  $x_1$ , y si existe una aplicación continua  $F: I \times I \rightarrow X$  tal que:

$$\begin{array}{ccc} F(s, 0) = f(s) & y & F(s, 1) = g(s) \\ F(0, t) = x_0 & y & F(1, t) = x_1 \end{array}$$

para cada  $s, t \in I$ . La aplicación  $F$  toma el nombre de **homotopía de caminos** entre  $f$  y  $g$  y escribiremos  $f \simeq_p g$ .

Se puede pensar la homotopía como una familia de aplicaciones  $f_t: X \rightarrow Y$  que produce una “deformación” continua de la aplicación  $f$  a  $g$  mientras “ $t$ ” varía de 0 a 1. (Ver figura 1)

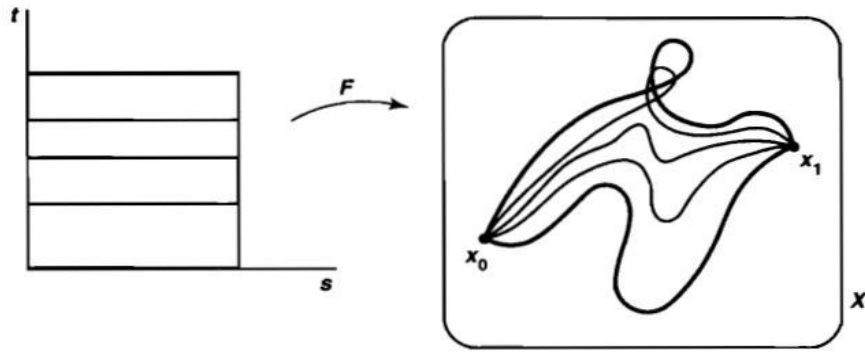


Figura 1

**Lema 1.1.1.** Las relaciones  $\approx$  y  $\approx_p$  son relaciones de equivalencia. Si  $f$  es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por  $[f]$ .

**Demostración.** Para su demostración ver [1].

**Definición 1.1.3.** Si  $f$  es un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$  y  $g$  es un camino en  $X$  de  $x_1$  a  $x_2$ , definimos el **producto de los caminos** de  $f$  y  $g$  y lo denotamos por  $f * g$  como el camino  $h$  dado por las ecuaciones:

$$h(s) = (f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & \text{para } s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

La aplicación  $h$  está bien definida y es continua; es un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_2$ . Podemos pensar en  $h$  como un camino en el que la primera mitad es el camino  $f$  y la segunda mitad es el camino  $g$ .

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación:  $[f] * [g] = [f * g]$ .

La operación  $*$  sobre clases de homotopía de caminos satisface propiedades similares a los axiomas de grupo. Una diferencia respecto de las propiedades de grupo es que  $[f] * [g]$  no está definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares  $[f], [g]$  para los que  $f(1) = g(0)$ .

**Teorema 1.1.1.** La operación  $*$  tiene las siguientes propiedades:

1. Asociatividad. Si  $[f] * ([g] * [h])$  está definida, también lo está  $([f] * [g]) * [h]$  y son iguales.

2. Neutro a izquierda y derecha. Dado  $x \in X$ , denotaremos por  $e_x$  el camino constante  $e_x: I \rightarrow X$  que lleva todo punto de  $I$  al punto  $x$ . Si  $f$  es un camino en  $X$  desde  $x_0$  hasta  $x_1$ , entonces

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad \text{y} \quad [e_{x_0}] * [f] = [f]$$

3. Inverso. Dado el camino  $f$  en  $X$  desde  $x_0$  hasta  $x_1$ , sea  $\bar{f}$  el camino definido por  $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ , el cual se conoce como el inverso de  $f$ . Entonces:

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{y} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$$

**Demostración.** Para su demostración Ver [2]

## 1.2 El grupo fundamental

Si a la operación  $*$  la restringimos a aquellos caminos en el espacio  $X$  que comienzan y acaban en un “**punto base**”  $x_0$ , el conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación  $*$ .

**Definición 1.2.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0$  un punto de  $X$ . Un camino en  $X$  que comienza y acaba en  $x_0$  se llama **lazo basado** en  $x_0$ . El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociados a los lazos basados en  $x_0$ , con la operación  $*$  se denomina **Grupo Fundamental** de  $X$  relativo al punto base  $x_0$  y denotado por  $\pi_1(X, x_0)$ .

Dados dos lazos  $f$  y  $g$  basados en  $x_0$ , el producto  $f * g$  está siempre definido y es un lazo basado en  $x_0$ .

**Observación:** Sean  $f$  y  $g$  dos aplicaciones cualesquiera de un espacio  $X$  en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $f$  y  $g$  son homotópicas, la aplicación:

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopía entre ellos, llamada **homotopía por rectas** porque lleva el punto  $f(x)$  al punto  $g(x)$  a lo largo del segmento de recta que los une. Si  $f$  y  $g$  son caminos de  $x_0$  a  $x_1$ , entonces  $F$  es una homotopía de caminos.

**Ejemplo 1.2.1:** Sea  $\mathbb{R}^n$  el espacio euclideo  $n$  – dimensional. Entonces  $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$  es el grupo trivial (consistente solo en el neutro), ya que si  $f$  es un lazo en  $\mathbb{R}^n$  basado en  $x_0$ , la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre  $f$  y el camino constante  $x_0$ .

**Definición 1.2.2.** Sea  $\alpha$  un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ . Definimos la aplicación:

$$\alpha : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

por la ecuación:  $\alpha([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$

La aplicación  $\alpha$  está bien definida. Si  $f$  es un lazo basado en  $x_0$ , entonces  $\overline{\alpha} * (f * \alpha)$  es un lazo basado en  $x_1$ .  $\overline{\alpha}$  denota el inverso de  $\alpha$ .

**Teorema 1.2.1.** La aplicación  $\alpha$  es un isomorfismo de grupos.

**Demostración.** Para su demostración ver [1].

**Corolario 1.2.1.** Si  $X$  es conexo por caminos, y  $x_0, x_1$  son dos puntos de  $X$ , entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$

Como consecuencia, podemos asociar a cada espacio conexo por caminos un grupo que podemos denotar por el Grupo Fundamental  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Definición 1.2.3.** Un espacio  $X$  es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo trivial (un elemento) para algún  $x_0 \in X$  y, por tanto, para todo  $x_0 \in X$ . Expresaremos el hecho que  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo trivial escribiendo  $\pi_1(X, x_0) = 0$ .

**Lema 1.2.1.** En un espacio simplemente conexo  $X$ , dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.

**Demostración.** Para su demostración ver [1].

Ahora, sea  $h: X \rightarrow Y$  una aplicación continua que lleva el punto  $x_0$  de  $X$  al punto  $y_0$  de  $Y$ . Denotaremos esta propiedad escribiendo:

$$h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

Si  $f$  es un lazo en  $X$  basado en  $x_0$ , entonces la composición  $h \circ f: I \rightarrow Y$  es un lazo basado en  $y_0$ .

**Definición 1.2.4.** Sea  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una aplicación continua. Definimos la aplicación **homomorfismo inducido por  $h$**  relativo al punto base  $x_0$ :

$$h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

por la ecuación:  $h_*([f]) = [h \circ f]$ .

El homomorfismo  $h_*$  no solo depende de la aplicación  $h: X \rightarrow Y$  sino también de la elección del punto base  $x_0$ . Si  $x_0$  y  $x_1$  son dos puntos diferentes de  $X$ , no podemos usar el mismo símbolo  $h_*$  para denotar los dos homomorfismos diferentes, uno teniendo dominio  $\pi_1(X, x_0)$  y el otro con dominio  $\pi_1(X, x_1)$ . En tal caso utilizaremos la notación:

$$h_{x_0}^*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

para el primer homomorfismo y  $h_{x_1}^*$  para el segundo.



**Teorema 1.2.2.** Si  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y  $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  son continuas, entonces  $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ . Si  $i: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  es la aplicación identidad, entonces  $i_*$  es el homomorfismo identidad.

**Demostración.** Por definición:

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] = [k \circ (h \circ f)] = k_*[h \circ f] = k_*[h_*([f])] = (k_* \circ h_*)([f]) .$$

Similarmente  $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$ . ■

**Corolario 1.2.2.** Si  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es un homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$ , entonces  $h_*$  es un isomorfismo entre  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(Y, y_0)$ .

**Demostración.** Sea  $k: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ , la inversa de  $h$ . Entonces se tiene:  $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$ , donde  $i$  es la aplicación identidad de  $(X, x_0)$ . Similarmente se obtiene:  $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$ , donde  $j$  es la aplicación identidad de  $(Y, y_0)$ . Dado que  $i_*$  y  $j_*$  son los homomorfismos identidad de  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(Y, y_0)$  respectivamente,  $k_*$  es la inversa de  $h_*$ . ■

Esto nos proporciona un buen ejemplo de lo que es la **Topología Algebraica**. Reemplazamos topología por álgebra y entonces utilizamos conocimientos de álgebra para aprender algo de topología. Desde luego, si los grupos fundamentales de dos espacios son isomorfos, esto NO significa que los dos espacios sean homeomorfos. Sin embargo, si los grupos fundamentales no son isomorfos, los espacios no pueden ser homeomorfos.

### 1.3. Espacios de Recubrimiento

La noción de Espacio de Recubrimiento es una de las herramientas más usuales para el cálculo de algunos grupos fundamentales que no son triviales tales como el círculo o el toro o cualquier subconjunto no convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Por simplicidad, supondremos que todos los espacios son conexos por caminos.

**Definición 1.3.1.** Una aplicación continua y sobreyectiva  $p: E \rightarrow B$  es llamada **aplicación recubridora** (o simplemente un **recubrimiento**) cuando cada punto  $b \in B$  pertenece a un abierto  $V \subset B$  tal que  $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  es una reunión de abiertos  $U_{\alpha}$

, dos a dos disjuntos, cada uno de los cuales se aplica por  $p$  homeomorficamente sobre  $V$ . El espacio  $E$  es llamado **espacio de recubrimiento** de  $B$  y para cada  $b \in B$ , el conjunto  $p^{-1}(b)$  es llamado una **fibra** sobre  $b$ .

Intuitivamente, el conjunto  $p^{-1}(U)$  como una “pila de láminas”, cada uno de ellos con el mismo tamaño y forma que  $U$ , flotando en el aire sobre  $U$ . La aplicación  $p$  los “aplasta” hacia  $U$ . (Ver figura 2)

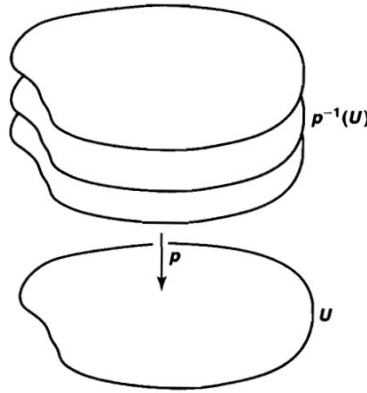


Figura 2

**Teorema 1.3.1.** Si  $p: E \rightarrow B$  es una aplicación recubridora.  $p$  es abierta.

**Demostración.** Veamos que  $\forall b \in p(A)$ , existe  $W$  abierto de  $B$  tal que  $b \in W \subset p(A)$ . Dado  $b$ , consideremos el entorno  $U_b$  tal que  $p^{-1}(U_b) = \bigcup V_\alpha$ , para una colección de abiertos  $V_\alpha$  de  $E$ . Como  $b \in p(A)$  entonces existe  $a \in A$  tal que  $p(a) = b$  ( $a \in p^{-1}(b)$ ) y existe un único  $V_\alpha$  tal que  $a \in V_\alpha$ . Ahora  $a \in V_\alpha \cap A$  que es un abierto en  $E$  y  $V_\alpha \cap A \subset V_\alpha$ . Sea el homeomorfismo  $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U_b$ ;  $p|_{V_\alpha}(V_\alpha \cap A) \subset U_b$  es un abierto en  $U_b$  que a su vez es abierto en  $B$ . Por lo que  $p(a) \in p(V_\alpha \cap A) \subset p(A)$ . ■

**Ejemplo 1.3.1.** La aplicación  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por la ecuación:

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

es una aplicación recubridora.

En efecto, consideremos el subconjunto  $U$  de  $\mathbb{S}^1$  consistente de aquellos puntos que tienen la primera coordenada positiva. El conjunto  $p^{-1}(U)$  consiste en aquellos puntos  $x$  tal que  $\cos(2\pi x) \geq 0$ , es decir, es la unión de los intervalos

$$V_n = \left( n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right) \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

La aplicación  $p$ , restringida a cualquier intervalo cerrado  $\overline{V_n}$  es inyectiva, porque  $\sin(2\pi x)$  es estrictamente monótona en tales intervalos. Además,  $p$  lleva  $\overline{V_n}$  sobreyectivamente sobre  $\overline{U}$  y  $V_n$  sobre  $U$ , por el teorema del valor intermedio. Dado que  $\overline{V_n}$  es compacto,  $p|_{\overline{V_n}}$  es un homeomorfismo entre  $\overline{V_n}$  y  $\overline{U}$ . En particular,  $p|_{V_n}$  es un homeomorfismo entre  $V_n$  y  $U$ .

Podemos aplicar un razonamiento similar a las intersecciones de  $\mathbb{S}^1$  con los semiplanos abiertos superior, inferior e izquierdo. Estos conjuntos abiertos recubren  $\mathbb{S}^1$ . Por tanto  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una aplicación recubridora. (Ver Figura 3)

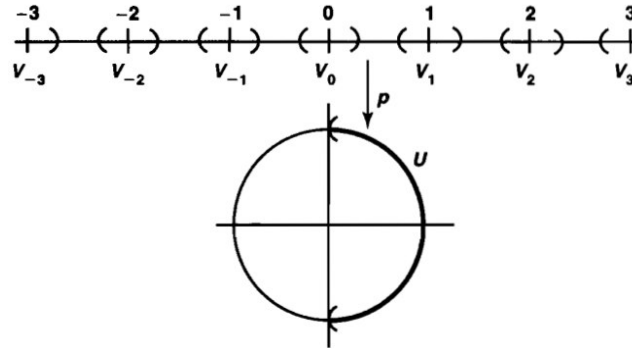


Figura 3

En una aplicación continua y sobreyectiva  $p: E \rightarrow B$ , diremos que un abierto  $V$  de  $B$  está **regularmente cubierto** por  $p$  si  $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  es una reunión de abiertos  $U_{\alpha}$ , dos a dos disjuntos, cada uno de los cuales se aplica por  $p$  homeomórficamente sobre  $V$ . Llamaremos a la colección  $\{U_{\alpha}\}$  partición de  $p^{-1}(V)$  en “rebanadas”.

**Teorema 1.3.2.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Si  $B_0$  es un subespacio de  $B$  y si  $E_0 = p^{-1}(B_0)$  entonces la aplicación  $p_0: E_0 \rightarrow B_0$ , obtenida al restringir  $p$ , es una aplicación recubridora.

**Demostración.** Sea  $b_0 \in B_0$  y  $U$ , un conjunto abierto en  $B$  que contiene a  $b_0$  y que esté regularmente cubierto por  $p$ ; sea  $\{V_{\alpha}\}$  una partición de  $p^{-1}(U)$  en rebanadas. Entonces  $U \cap B_0$  es un entorno de  $b_0$  en  $B_0$  y los conjuntos  $V_{\alpha} \cap E_0$  son abiertos y disjuntos en  $E_0$  cuya unión es  $p^{-1}(U \cap B_0)$  y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente sobre  $U \cap B_0$  mediante  $p$ . ■

**Teorema 1.3.3.** Si  $p: E \rightarrow B$  y  $q: E^1 \rightarrow B^1$  son aplicaciones recubridoras entonces

$$p \times q: E \times E^1 \rightarrow B \times B^1$$

es una aplicación recubridora.

**Demostración.** Dados  $b \in B$  y  $b^1 \in B^1$ , sean  $M$  y  $N$  entornos de  $b$  y  $b^1$  respectivamente, que estén regularmente cubiertos por  $p$  y  $q$ , respectivamente. Sean  $\{V_{\alpha}\}$  y  $\{V_{\beta}^1\}$  particiones en rebanadas de  $p^{-1}(M)$  y  $q^{-1}(N)$  respectivamente.

Entonces la imagen inversa mediante  $p \times q$  del conjunto abierto  $M \times N$  es la unión de todos los conjuntos  $V_{\alpha} \times V_{\beta}^1$ . Estos conjuntos son abiertos disjuntos de  $E \times E^1$  y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente sobre  $M \times N$  por  $p \times q$ . ■

**Ejemplo 1.3.2.** Consideremos el espacio  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , conocido como **toro**. La aplicación producto

$$p \times p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

es un cubrimiento del toro por el plano  $\mathbb{R}^2$ , donde  $p$  es la aplicación recubridora  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por la ecuación:  $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ . Cada uno de los cuadrados unidad  $[n, n+1] \times [m, m+1]$  se enrolla completamente alrededor del toro, por medio de  $p \times p$ . (Ver figura 4)

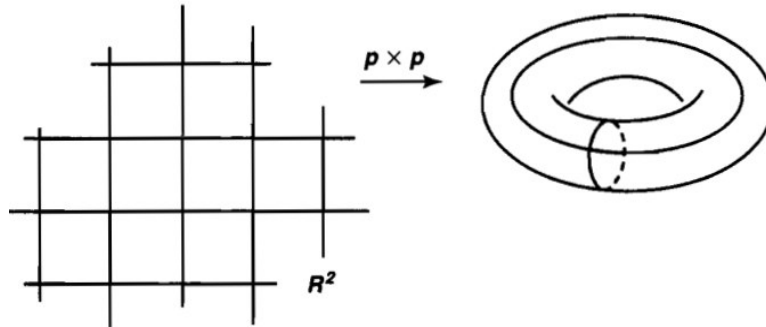


Figura 4

#### 1.4 Aplicación: El grupo fundamental del círculo $\mathbb{S}^1$

**Definición 1.4.1.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación. Si  $f$  es una aplicación continua de algún espacio  $X$  en  $B$ , un **levantamiento** de  $f$  es una aplicación  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  tal que  $p \circ \tilde{f} = f$ . (Ver figura 5)

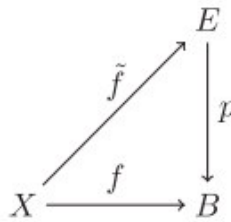


Figura 5

**Ejemplo 1.4.1.** Consideremos el cubrimiento  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por:  $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ . El camino  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  comenzando en  $b_0 = (1, 0)$  y dado por  $f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$  se levanta al camino  $\tilde{f}(s) = s/2$  comenzando en 0 y acabando en  $1/2$ . El camino  $g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$  se levanta al camino  $\tilde{g}(s) = -s/2$ , que comienza en 0 y acaba en  $-1/2$ . (Ver figura 6)

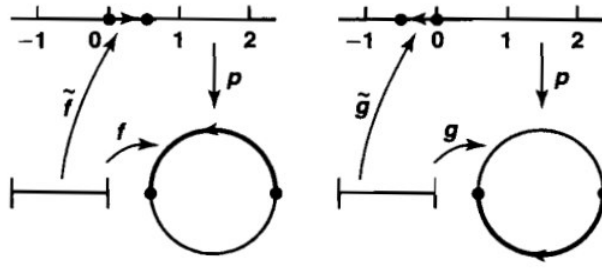


Figura 6

**Lema 1.4.1.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = b_0$ . Cualquier camino  $f: [0,1] \rightarrow B$  comenzando en  $b_0$  tiene un único levantamiento a un camino  $\tilde{f}$  en  $E$  que comienza en  $e_0$ .

**Demostración.** Para su demostración ver [1]

**Lema 1.4.2.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = b_0$ . Sea  $F: I \times I \rightarrow B$  una aplicación continua con  $F(0, 0) = b_0$ . Existe un único levantamiento de  $F$  a una aplicación continua:

$$\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$$

tal que  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ . Si  $F$  es una homotopía de caminos, entonces  $\tilde{F}$  es una homotopía de caminos.

**Demostración.** Para su demostración ver [1]

**Teorema 1.4.1.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = b_0$ . Sean  $f$  y  $g$  dos caminos en  $B$  de  $b_0$  a  $b_1$ , y sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  sus respectivos levantamientos a caminos en  $E$  comenzando en  $e_0$ . Si  $f$  y  $g$  son homotópicos por caminos, entonces  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  terminan en el mismo punto de  $E$  y son homotópicos por caminos.

**Demostración.** Sea  $F: I \times I \rightarrow B$  la homotopía de caminos entre  $f$  y  $g$ , entonces  $F(0, 0) = b_0$ . Sea  $\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$  un levantamiento de  $F$  a  $E$  tal que  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ . Por el lema anterior,  $\tilde{F}$  es una homotopía de caminos, por lo que  $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$  y  $\tilde{F}(1 \times I)$  es un conjunto unipuntual que denotaremos por  $\{e_1\}$ . La restricción  $F|_{I \times 0}$  de  $\tilde{F}$  es un camino en  $E$  que empieza en  $e_0$  y es un levantamiento de  $F|_{I \times 0}$ .

Por la unicidad de levantamiento de caminos tenemos que  $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$ . De manera similar  $F|_{I \times 1}$  es un camino de  $E$  que es levantamiento de  $F|_{I \times 1}$  que empieza en  $e_0$  porque  $F(0 \times I) = \{e_0\}$ . Por unicidad de levantamiento de caminos tenemos que  $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$ . Por tanto, tanto  $\tilde{f}$  como  $\tilde{g}$  acaban en  $e_1$ , y  $\tilde{F}$  es la homotopía de caminos entre ellos. ■

**Definición 1.4.2.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora y  $b_0 \in B$ . Elijamos  $e_0$  de forma que  $p(e_0) = b_0$ . Dado un elemento  $[f]$  de  $\pi_1(B, b_0)$ , sea  $\tilde{f}$  el levantamiento de  $f$  a un camino en  $E$  que comience en  $e_0$ . Denotemos por  $\Phi([f])$  el punto final  $\tilde{f}(1)$  de  $\tilde{f}$ . Entonces  $\Phi$  es una aplicación bien definida

$$\Phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

Denominamos a  $\Phi$  **correspondencia del levantamiento** derivada de la aplicación recubridora  $p$ . Evidentemente, depende de la elección del punto  $e_0$ .

**Teorema 1.4.2.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = b_0$ . Si  $E$  es conexo por caminos, entonces la correspondencia del levantamiento

$$\Phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

es sobreyectiva. Si  $E$  es simplemente conexo, entonces es biyectiva.

**Demostración.** Si  $E$  es conexo por caminos entonces, dado  $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ , existe un camino  $\tilde{f}$  en  $E$  de  $e_0$  a  $e_1$ . De modo que  $f = p \circ \tilde{f}$  es un lazo en  $B$  con base  $b_0$  y  $\Phi([f]) = e_1$ , por definición.

En el caso que  $E$  es simplemente conexo, sean  $[f]$  y  $[g]$  dos elementos de  $\pi_1(B, b_0)$  tales que  $\Phi([f]) = \Phi([g])$ . Sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  los levantamientos de  $f$  y  $g$ , respectivamente, a caminos en  $E$  comenzando en  $e_0$ ; entonces  $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ . Como  $E$  es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos  $\tilde{F}$  en  $E$  entre  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$ . Entonces  $p \circ \tilde{F}$  es una homotopía de caminos en  $B$  entre  $f$  y  $g$ . ■

**Teorema 1.4.3.** El grupo fundamental de  $S^1$  es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.

**Demostración.** Sea  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la aplicación recubridora  $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ , y sean  $e_0 = 0$  y  $p(e_0) = b_0$ . Entonces  $p^{-1}(b_0)$  es el conjunto  $\mathbb{Z}$  de los enteros. Dado que  $\mathbb{R}$  es simplemente conexo, la correspondencia del levantamiento

$$\Phi: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

es biyectiva. Queda por probar que  $\Phi$  es un homomorfismo.

Dados  $[f]$  y  $[g]$  en  $\pi_1(S^1, b_0)$  sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  sus respectivos levantamientos a caminos en  $\mathbb{R}$  comenzando en 0. Sean  $n = \tilde{f}(1)$  y  $m = \tilde{g}(1)$ , entonces  $\Phi([f]) = n$  y  $\Phi([g]) = m$ ; por definición. Sea  $\tilde{g}$  el camino

$$\tilde{g}(s) = n + \tilde{g}(s)$$

en  $\mathbb{R}$ .

Como  $p(n + x) = p(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , el camino  $\tilde{g}$  es un levantamiento de  $g$  que comienza en  $n$ . Entonces el producto  $\tilde{f} * \tilde{g}$  está definido y es el levantamiento de  $f * g$  que comienza en 0. El punto final de este camino es  $\tilde{g}(1) = n + m$ . Entonces por definición,

$$\Phi([f] * [g]) = n + m = \Phi([f]) + \Phi([g]). \blacksquare$$

**Teorema 1.4.4.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = b_0$ .

- a) El homomorfismo  $p_*: \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  es un monomorfismo.
- b) Sea  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ . La correspondencia del levantamiento  $\Phi$  induce una aplicación inyectiva

$$\Phi: \pi_1(B, b_0)|_H \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

de la colección de las clases por la derecha de  $H$  en  $p^{-1}(b_0)$ , la cual es biyectiva si  $E$  es conexo por caminos.

- c) Si  $f$  es un lazo en  $B$  basado en  $b_0$ , entonces  $[f] \in H$  si y solo si  $f$  es un levantamiento a un lazo en  $E$  basado en  $e_0$ .

**Demostración.** Para su demostración ver [1].

## Capítulo 2

### Construcción de espacios de recubrimiento sobre un espacio topológico

En este capítulo, que consta del tema central del trabajo, usaremos el grupo fundamental como una herramienta para estudiar espacios de recubrimiento (o espacios recubridores). A partir de este capítulo  $p: E \rightarrow B$  significará una aplicación recubridora con  $p(e_0) = b_0$ , a su vez  $E$  y  $B$  son localmente conexos por caminos (es decir, para cada  $x \in E$  y cada entorno  $U$  de  $x$ , existe un entorno conexo por caminos  $V$  de  $x$  contenido en  $U$ ) y conexos por caminos, a menos que se especifique lo contrario. También se tendrá por supuesto el teorema general de la correspondencia del levantamiento (teorema 1.4.4.).

Si  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = b_0$ , entonces el homomorfismo inducido  $p_*$  es inyectivo, por el teorema 1.4.4., de manera que  $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$  es un subgrupo de  $\pi_1(B, b_0)$  isomorfo a  $\pi_1(E, e_0)$ .

#### 2.1. El espacio recubridor universal

Supongamos que  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = b_0$ . Si  $E$  es simplemente conexo, entonces  $E$  se denomina espacio recubridor universal de  $B$ . Dado que  $\pi_1(E, e_0)$  es trivial, este espacio recubridor corresponde al subgrupo trivial de  $\pi_1(B, b_0)$  bajo la correspondencia  $p_*$ . Por tal razón, con frecuencia hablamos de “el” espacio recubridor universal de un espacio dado  $B$ .

Antes se generalizará los lemas de levantamiento mencionados en la sección 1.4.

**Lema 2.1.1.** (Levantamiento general) Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora y  $p(e_0) = b_0$ . Sea  $f: Y \rightarrow B$  una aplicación con  $f(y_0) = b_0$ . Supongamos que  $Y$  es conexo por caminos y localmente conexo por caminos.



La aplicación  $f$  se puede levantar a una aplicación  $\tilde{f}: Y \rightarrow E$  tal que  $\tilde{f}(y_0) = e_0$  si y solo si

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$$

Además, si tal levantamiento existe, es único.

**Demostración.** Si el levantamiento  $\tilde{f}$  existe, entonces

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(f_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$$

Ahora probamos que si  $\tilde{f}$  existe, es única. Dado  $y_1 \in Y$ , se elige un camino  $\alpha$  en  $Y$  desde  $y_0$  hasta  $y_1$ .

Se toma el camino  $f \circ \alpha$  en  $B$  y se levanta a un camino  $\gamma$  en  $E$  que comienza en  $e_0$ . Si un tal levantamiento  $\tilde{f}$  de  $f$  existe, entonces  $f(y_1)$  debe ser igual al punto final  $\gamma(1)$  de  $\gamma$ , pues  $\tilde{f} \circ \alpha$  es un levantamiento de  $f \circ \alpha$  que comienza en  $e_0$ , y los levantamientos de caminos son únicos.

Recíprocamente, dado  $y_1 \in Y$ , se elige un camino  $\alpha$  en  $Y$  desde  $y_0$  hasta  $y_1$ . Se levanta el camino  $f \circ \alpha$  a un camino  $\gamma$  en  $E$  que comienza en  $e_0$  y se define  $\tilde{f}(y_1) = \gamma(1)$  (Ver la figura 7).  $\tilde{f}$  está bien definida y es continua. Para probar la continuidad de  $\tilde{f}$  en el punto  $y_1 \in Y$ , veamos que, dado un entorno  $N$  de  $\tilde{f}(y_1)$ , existe un entorno  $W$  de  $y_1$  tal que  $\tilde{f}(W) \subset N$ . Para comenzar, se elige un entorno conexo por caminos  $U$  de  $f(y_1)$  que está regularmente recubierto por  $p$ . Descompongamos  $p^{-1}(U)$  en rebanadas, y sea  $V_0$  la rebanada que contiene al punto  $\tilde{f}(y_1)$ . Sustituyendo  $U$  por un entorno más pequeño de  $f(y_1)$ , si fuera necesario, podemos suponer que  $V_0 \subset N$ . Sea  $p_0: V_0 \rightarrow U$ ; como es una restricción de  $p$ ,  $p_0$  es un homeomorfismo. Dado que  $f$  es continua en  $y_1$  e  $Y$  es localmente conexo por caminos, podemos encontrar un entorno conexo por caminos  $W$  de  $y_1$  tal que  $f(W) \subset U$ . Queda por probar  $\tilde{f}(W) \subset V_0$ .

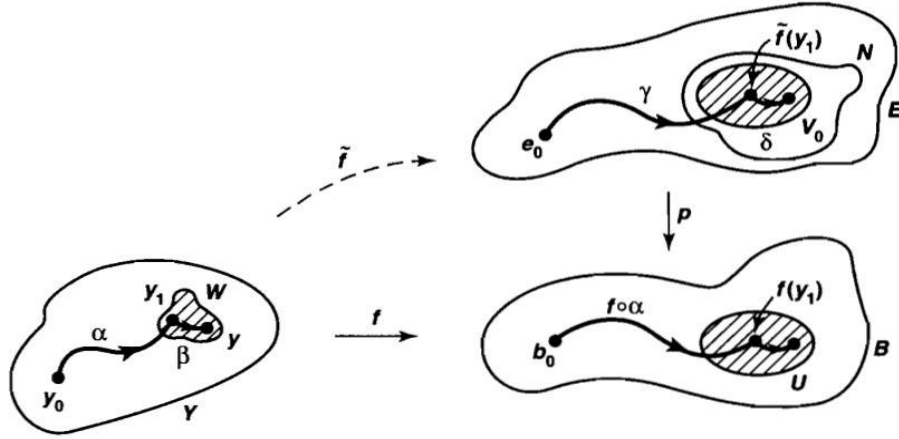


Figura 7

Dado  $y \in W$ , se elige un camino  $\beta$  en  $W$  desde  $y_1$  hasta  $y$ . Como  $\tilde{f}$  está bien definida,  $\tilde{f}(y)$  se puede obtener tomando el camino  $\alpha * \beta$  desde  $y_0$  hasta  $y$ , levantando el camino  $f \circ (\alpha * \beta)$  a un camino en  $E$  que empieza en  $e_0$  y haciendo que  $\tilde{f}(y)$  sea el punto final de este levantamiento. Tenemos que  $\gamma$  es un levantamiento de  $\alpha$  que empieza en  $e_0$ .

Dado que  $f \circ \beta$  está en  $U$ , el camino  $\delta = p_0^{-1} \circ f \circ \beta$  es un levantamiento de  $f \circ \beta$  que parte de  $\tilde{f}(y_1)$ . Entonces  $\gamma * \delta$  es un levantamiento de  $f \circ (\alpha * \beta)$  que parte de  $e_0$  y acaba en  $\delta(1) \in V_0$ . Por consiguiente,  $\tilde{f}(W) \subset V_0$ . ■

**Lema 2.1.2.** Sea  $B$  conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Si  $E_0$  es una componente conexa por caminos de  $E$ , entonces la aplicación  $p_0 = p|_{E_0}: E_0 \rightarrow B$  es una aplicación recubridora.

**Demostración.** Primero probemos que  $p_0$  es sobreyectiva. Como  $E$  es localmente homeomorfo a  $B$ , es localmente conexo por caminos. Por tanto,  $E_0$  es abierto en  $E$ . Se sigue que  $p(E_0)$  es abierto en  $B$ . Como  $p(E_0)$  es cerrado en  $B$ , se tiene  $p(E_0) = B$ .

Probemos que  $p(E_0)$  es cerrado en  $B$ . Sea el punto  $x \in B$  que pertenezca a la clausura de  $p(E_0)$ . Sea  $U$  un entorno conexo por caminos de  $x$  que está regularmente cubierto por  $p$ . Dado que  $U$  contiene un punto de  $p(E_0)$ , alguna rebanada  $V_\alpha$  de  $p^{-1}(U)$  debe cortar a  $E_0$ . Como  $V_\alpha$  es homeomorfo a  $U$ , es conexo por caminos; por tanto, debe estar contenido en  $E_0$ . Entonces  $p(V_\alpha) = U$  está contenido en  $p(E_0)$ , en particular,  $x \in p(E_0)$ .

Ahora probemos que  $p_0: E_0 \rightarrow B$  es una aplicación recubridora. Dado  $x \in B$ , escojamos un camino  $U$  de  $x$ . Si  $V_\alpha$  es una rebanada de  $p^{-1}(U)$ , entonces  $V_\alpha$  es conexo por caminos; si corta a  $E_0$ , está en  $E_0$ . Por tanto  $p^{-1}(U)$  es igual a la unión de las rebanadas  $V_\alpha$  de  $p^{-1}(U)$  que cortan a  $E_0$ , cada una de ellas es abierta en  $E_0$  y se aplica homeomórficamente por  $p_0$  en  $U$ . Por tanto,  $U$  está regularmente cubierto por  $p_0$ . ■

**Lema 2.1.3.** Sean  $p: X \rightarrow Z$ ,  $q: X \rightarrow Y$ ,  $r: Y \rightarrow Z$  aplicaciones continuas con  $p = r \circ q$ .

- a) Si  $p$  y  $r$  son aplicaciones recubridoras, también lo es  $q$ .
- b) Si  $p$  y  $q$  son aplicaciones recubridoras, también lo es  $r$ .

**Demostración.** Asumiendo lo establecido al inicio del capítulo,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Sea  $x_0 \in X$ , además  $y_0 = q(x_0)$  y  $z_0 = p(x_0)$ .

- a) Sean  $p$  y  $r$  aplicaciones recubridoras. Probemos primero que  $q$  es sobreyectiva. Dado  $y \in Y$ , escojamos un camino  $\tilde{\alpha}$  en  $Y$  de  $y_0$  a  $y$ . Entonces  $\alpha = r \circ \tilde{\alpha}$  es un camino en  $Z$  partiendo de  $z_0$ ; sea  $\tilde{\alpha}$  un levantamiento de  $\alpha$  a un camino en  $X$  partiendo de  $x_0$ . Entonces  $q \circ \tilde{\alpha}$  es un levantamiento de  $\alpha$  a  $Y$  partiendo de  $y_0$ . Por la unicidad de levantamientos de caminos,  $\tilde{\alpha} = q \circ \tilde{\alpha}$ . Entonces  $q$  aplica el punto final de  $\tilde{\alpha}$  en el punto final  $y$  de  $\tilde{\alpha}$ . Por tanto,  $q$  es sobreyectiva.

Dado  $y \in Y$ , encontramos un entorno de  $y$  que está regularmente cubierto por  $q$ . Sea  $z = r(y)$ . Como  $p$  y  $r$  son aplicaciones recubridoras, podemos encontrar un entorno conexo por caminos  $U$  de  $z$  que está regularmente cubierto por  $p$  y  $r$ . Sea  $V$  la rebanada de  $r^{-1}(U)$  que contiene al punto  $y$ ; probemos que  $V$  está regularmente cubierto por  $q$ . Sea  $\{U_\alpha\}$  la colección de rebanadas de  $p^{-1}(U)$ . Se observa que  $q$  aplica cada conjunto  $U_\alpha$  en el conjunto  $r^{-1}(U)$ ; como  $U_\alpha$  es conexo, debe ser aplicado por  $q$  en una de las rebanadas de  $r^{-1}(U)$ .

Por tanto  $q^{-1}(V)$  es la unión de aquellas rebanadas  $U_\alpha$  que se aplican por  $q$  en  $V$ . Es claro que cada uno de los  $U_\alpha$  se aplica homeomórficamente sobre  $V$  por  $q$ ; pues sean  $p_0$ ,  $q_0$  y  $r_0$  las restricciones de  $p$ ,  $q$  y  $r$  respectivamente como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha & \xrightarrow{q_0} & V \\
 p_0 \downarrow & & \nearrow r_0 \\
 U & & 
 \end{array}$$

Dado que  $p_0$  y  $r_0$  son homeomorfismos, se tiene  $q_0 = r_0^{-1} \circ p_0$ .

b) Su prueba es análoga a la parte a). ■

**Teorema 2.1.1.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora con  $E$  simplemente conexo. Dada cualquier aplicación recubridora  $r: Y \rightarrow B$ , existe una aplicación recubridora  $q: E \rightarrow Y$  tal que  $p = r \circ q$ .

Este teorema demuestra por qué  $E$  se denomina RECUBRIDOR UNIVERSAL de  $B$ : recubre cualquier otro espacio recubridor de  $B$ .

**Demostración.** Sea  $b_0 \in B$ , escojamos  $e_0$  e  $y_0$  tales que  $p(e_0) = b_0$  y  $r(y_0) = b_0$ . Se aplica el lema 2.1.1. para construir  $q$ .

La aplicación  $r$  es una aplicación recubridora, y la condición

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset r_*(\pi_1(Y, y_0))$$

se satisface trivialmente, ya que  $E$  es simplemente conexo. Por tanto, existe una aplicación  $q: E \rightarrow Y$  tal que  $r \circ q = p$  y  $q(e_0) = y_0$ . Se sigue del lema anterior que  $q$  es una aplicación recubridora. ■

No todo espacio cuenta con un espacio recubridor universal. A continuación daremos un ejemplo de un espacio con esta característica; para ello se necesita el siguiente lema.

**Lema 2.1.4.** Sean  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora y  $p(e_0) = b_0$ . Si  $E$  es simplemente conexo, entonces  $b_0$  tiene un entorno  $U$  tal que la inclusión  $i: U \rightarrow B$  induce el homomorfismo trivial:  $i_*: \pi_1(U, b_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$

**Demostración.** Sea  $U$  un entorno de  $b_0$  regularmente cubierto por  $p$ . Se particiona  $p^{-1}(U)$  en rebanadas y sea  $U_\alpha$ , la rebanada que contiene a  $e_0$ . Sea  $f$ , un lazo en  $U$  basado en  $b_0$ . Como  $p$  define un homeomorfismo de  $U_\alpha$  con  $U$ , el lazo  $f$  se levanta a un lazo  $\tilde{f}$  en  $U_\alpha$  basado en  $e_0$ . Como  $E$  es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos  $\tilde{F}$  en  $E$  entre  $\tilde{f}$  y un lazo constante. Entonces  $p \circ \tilde{F}$  es una homotopía de caminos en  $B$  entre  $f$  y un lazo constante. ■

## 2.2. Transformaciones recubridoras

Dada una aplicación recubridora  $p: E \rightarrow B$ , consideremos el conjunto de todos los homeomorfismos  $h: E \rightarrow E$  tal que  $p = p \circ h$ . A esta aplicación se le denomina **Transformación Recubridora**. Denotaremos al grupo de transformaciones recubridoras como  $C(E, p, B)$ .

**Definición 2.2.1.** Dos subgrupos  $H_1$  y  $H_2$  de un grupo  $G$  se dice que son **conjugados** si  $H_2 = \alpha \cdot H_1 \cdot \alpha^{-1}$ , para algún elemento  $\alpha$  de  $G$ . Es decir, los subgrupos son conjugados si el isomorfismo de  $G$  en sí mismo que aplica  $x$  en  $\alpha \cdot x \cdot \alpha^{-1}$  aplica  $H_1$  en  $H_2$ .

Dado  $H$ , subgrupo de  $G$ , entonces el **normalizador** de  $H$  en  $G$  es el subgrupo de  $G$  definido por

$$N(H) = \{g / gHg^{-1} = H\}$$

**Definición 2.2.2.** Dada  $p: E \rightarrow B$  con  $p(e_0) = b_0$ , sea  $F$  el conjunto  $F = p^{-1}(e_0)$ . Sea

$$\Phi: \pi_1(B, b_0) / H_0 \rightarrow F$$

la correspondencia de levantamientos del teorema 1.4.4; es una biyección. Se define también una correspondencia

$$\Psi: C(E, p, B) \rightarrow F$$

Poniendo  $\Psi(h) = h(e_0)$  para cada transformación recubridora  $h: E \rightarrow E$ . Como  $h$  queda unívocamente determinada una vez que se conoce su valor en  $e_0$ ,  $\Psi$  es inyectiva.

**Lema 2.2.1.** La imagen de la aplicación  $\Psi$  es igual a la imagen por  $\Phi$  del subgrupo  $N(H_0)/H_0$  de  $\pi_1(B, b_0) / H_0$

**Demostración.** La correspondencia del levantamiento  $\Phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow F$  se definía de la siguiente manera: dado un lazo  $\alpha$  en  $B$  basado en  $b_0$ , sea  $\gamma$  su levantamiento a  $E$  partiendo de  $e_0$ . Pongamos  $e_1 = \gamma(1)$ . Se define  $\Phi$  por  $\Phi([\alpha]) = e_1$ .

Para probar el lema es necesario demostrar que existe una transformación recubridora  $h: E \rightarrow E$  con  $h(e_0) = e_1$  si y solo si  $[\alpha] \in N(H_0)$ .

El lema del levantamiento general afirma que  $h$  existe si y solo si  $H_0 = H_1$ , donde  $H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$ . Afirmamos  $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$ .

En efecto, dado  $[h] \in H_1$ , se tiene  $[h] = p_*([h])$ , para algún lazo  $[h]$  en  $E$  basado en  $e_1$ .

Sea  $k$  el camino  $k = (\gamma * h) * \alpha$  con  $\alpha = p \circ \gamma$ .  $k$  es un lazo en  $E$  basado en  $e_0$  y

$$p_*([k]) = [(\alpha * h) * \bar{\alpha}] = [\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1}$$

Así, el último elemento está en  $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$ . Por tanto  $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0$ .

Tomando  $\bar{\gamma}$  el camino inverso de  $\gamma$ , es decir, de  $e_1$  a  $e_0$  y  $\bar{\alpha} = p \circ \bar{\gamma}$  se verifica:

$$H_0 \subset [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}.$$

Por consiguiente,  $h$  existe si y solo si  $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$ , que es equivalente a decir que  $[\alpha] \in N(H_0)$ . ■

**Teorema 2.2.1.** La biyección

$$\Phi^{-1} \circ \Psi: C(E, p, B) \rightarrow N(H_0)/H_0$$

es un isomorfismo de grupos.

**Demostración.** Solo es necesario probar que  $\Phi^{-1} \circ \Psi$  es un homomorfismo. Sean  $h, k: E \rightarrow E$  transformaciones recubridoras con  $h(e_0) = e_1$  y  $k(e_0) = e_2$ . Entonces:

$$\Psi(h) = e_1 \quad \text{y} \quad \Psi(k) = e_2$$

por definición. Escojamos caminos  $\gamma$  y  $\delta$  en  $E$  de  $e_0$  a  $e_1$  y  $e_2$ , respectivamente. Si  $\alpha = p \circ \gamma$  y  $\beta = p \circ \delta$ , entonces

$$\Phi([\alpha]H_0) = e_1 \quad \text{y} \quad \Phi([\beta]H_0) = e_2$$

por definición. Sea  $e_3 = h(k(e_0))$ ; entonces  $\Psi(h \circ k) = e_3$ . Probando que  $\Phi([\alpha * \beta]H_0) = e_3$ , la demostración quedará terminada.

Como  $\delta$  es un camino de  $e_0$  a  $e_2$ , el camino  $h \circ \delta$  va de  $h(e_0) = e_1$  a  $h(e_2) = h(k(e_0)) = e_3$  (Ver figura 8). Entonces el producto  $\gamma * (h \circ \delta)$  está definido y es un camino de  $e_0$  a  $e_3$ .

Además, es un levantamiento de  $\alpha * \beta$  ya que  $p \circ \gamma = \alpha$  y  $p \circ h \circ \delta = p \circ \delta = \beta$ . Por tanto  $\Phi([\alpha * \beta]H_0) = e_3$ , lo que se deseaba probar. ■

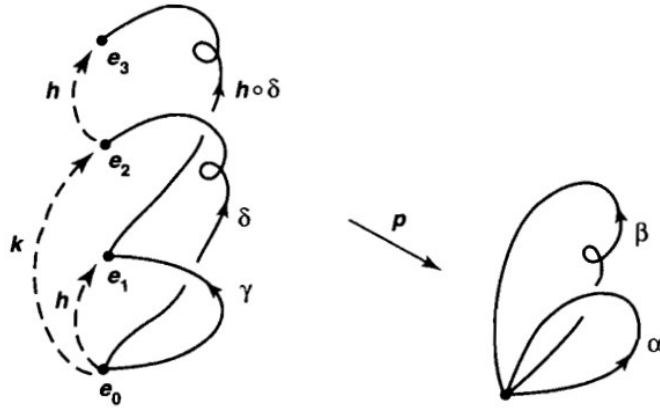


Figura 8

**Corolario 2.2.1.** El grupo  $H_0$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(B, b_0)$  si y solo si, para cada par de puntos  $e_1$  y  $e_2$  de  $p^{-1}(b_0)$ , existe una transformación recubridora  $h: E \rightarrow E$  con  $h(e_1) = e_2$ . En este caso, existe un isomorfismo

$$\Phi^{-1} \circ \Psi: C(E, p, B) \rightarrow \pi_1(B, b_0) / H_0$$

En efecto, dado que  $H_0$  es subgrupo normal de  $\pi_1(B, b_0)$ , es claro de la definición de normalizador que  $N(H_0) = \pi_1(B, b_0)$ .

**Corolario 2.2.2.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Si  $E$  es simplemente conexo, entonces existe un isomorfismo entre  $C(E, p, B)$  y  $\pi_1(B, b_0)$ . Si  $H_0$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(B, b_0)$ , entonces  $p: E \rightarrow B$  se denomina aplicación recubridora regular.

**Ejemplo 2.2.1.** Dado que el grupo fundamental del círculo  $\mathbb{S}^1$  es abeliano, cada recubridor es regular. En efecto, si  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es la aplicación recubridora estándar, por ejemplo, las transformaciones recubridoras son los homeomorfismos  $x \rightarrow x + n$ . El grupo de tales transformaciones es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 2.2.2.** Consideremos el espacio recubridor de la figura “ocho” (Ver figura 9), consistente en la unión de dos círculos tangentes  $A$  y  $B$ , que se origina envolviendo el eje  $X$  alrededor del círculo  $A$  y el eje  $Y$  alrededor del  $B$ . Los círculos  $A_i$  y  $B_i$  que se encargan de envolver a los círculos  $A$  y  $B$  se aplican homeomórficamente a ellos. Probemos que el grupo  $C(E, p, B)$  es trivial.

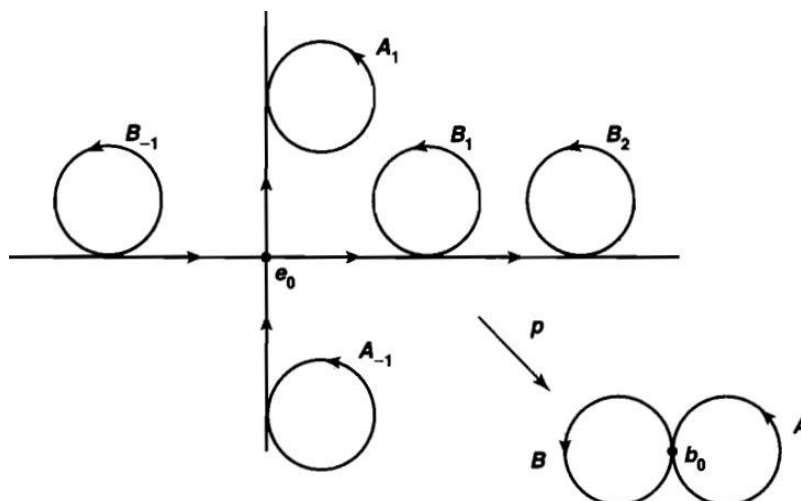


Figura 9

En general, si  $h: E \rightarrow E$  es una transformación recubridora, entonces cualquier lazo en el espacio base que se levanta a un lazo en  $E$  en  $e_0$  también se levanta a un lazo cuando el levantamiento empieza de  $h(e_0)$ .

En este caso, un lazo que genera el grupo fundamental de  $A$  se levanta a un no-lazo cuando el levantamiento está basado en  $e_0$  y se levanta a un lazo cuando está basado en cualquier otro punto de  $p^{-1}(b_0)$  en el eje  $Y$ . De manera análoga, un lazo que genera el grupo fundamental de  $B$  se levanta a un no-lazo partiendo de  $e_0$  y a un lazo partiendo de cualquier otro punto de  $p^{-1}(b_0)$  en el eje  $X$ . Se sigue que  $h(e_0) = e_0$ , de este modo,  $h$  es la aplicación identidad.

**Definición 2.2.3.** Sean  $X$  un espacio y  $G$  un grupo. Una **acción de  $G$  sobre  $X$**  es una aplicación continua  $\alpha: G \times X \rightarrow X$  tal que, denotando  $\alpha(g, x) = g \cdot x$ , se tiene:

- i.  $e \cdot x = x$ , para todo  $x \in X$
- ii.  $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ , para todo  $x \in X$ ,  $g_1$  y  $g_2 \in G$ .

Sean  $X$  un espacio y  $G$  un subgrupo del grupo de homeomorfismos de  $X$  consigo mismo. El **espacio de órbitas**  $X/G$  se define como el espacio cociente obtenido de  $X$  por medio de la relación de equivalencia  $x \sim g(x)$  para todo  $x \in X$  y todo  $g \in G$ . La clase de equivalencia de  $x$  se denomina **órbita** de  $x$ .



**Definición 2.2.4.** Si  $G$  es un grupo de homeomorfismos de  $X$ , la acción de  $G$  sobre  $X$  se dice que es **propia** si para cada  $x \in X$  existe un entorno  $U$  de  $x$  tal que  $g(U)$  es disjunto con  $U$  siempre que  $g \neq e$  (con  $e$ , elemento neutro de  $G$ ). Se sigue que  $g_0(U)$  y  $g_1(U)$  son disjuntos siempre que  $g_0 \neq g_1$ , pues de lo contrario  $U$  y  $g_0^{-1}g_1(U)$  no serían disjuntos.

**Teorema 2.2.2.** Sean  $X$  conexo por caminos y localmente conexo por caminos y  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $X$ . La aplicación cociente  $\pi: X \rightarrow X/G$  es una aplicación recubridora si y solo si la acción de  $G$  es propia. En este caso, la aplicación recubridora  $\pi$  es regular y  $G$  es su grupo de transformaciones recubridoras.

**Demostración.** Primero probemos que  $\pi$  es una aplicación abierta. Si  $U$  es un abierto en  $X$ , entonces  $\pi^{-1}\pi(U)$  es la unión de los conjuntos abiertos  $g(U)$  de  $X$ , para cada  $g \in G$ . Por tanto,  $\pi^{-1}\pi(U)$  es abierto en  $X$  y  $\pi(U)$  es abierto en  $X/G$  por definición. Así,  $\pi$  es abierta.

Ahora supongamos que la acción de  $G$  es propia y probemos que  $\pi$  es una aplicación recubridora. Dado  $x \in X$ , sea  $U$ , un entorno de  $x$  tal que  $g_0(U)$  y  $g_1(U)$  son disjuntos siempre que  $g_0 \neq g_1$ . Entonces  $\pi(U)$  está regularmente cubierto por  $\pi$ .

En efecto,  $\pi^{-1}\pi(U)$  es igual a la unión de abiertos disjuntos  $g(U)$ , con  $g \in G$ , cada uno de los cuales contiene a lo sumo un punto de cada órbita. Por tanto, la aplicación  $g(U) \rightarrow \pi(U)$  obtenida por la restricción de  $\pi$  es una biyección, además es continua y abierta; por tanto es un homeomorfismo. Los conjuntos  $g(U)$ , para  $g \in G$ , forman una partición de  $\pi^{-1}\pi(U)$  en rebanadas.

Recíprocamente, sea  $\pi$  es una aplicación recubridora. Dado  $x \in X$ , sea  $V$  un entorno de  $\pi(x)$  que está regularmente cubierto por  $\pi$ . De la partición de  $\pi^{-1}(V)$  en rebanadas, sea  $U_\alpha$  la que contiene a  $x$ . Dado  $g \in G$ , con  $g \neq e$ , el conjunto  $g(U_\alpha)$  debe ser disjunto con  $U_\alpha$ , pues de lo contrario, dos puntos de  $U_\alpha$  deberían pertenecer a la misma órbita y la restricción de  $\pi$  a  $U_\alpha$  no sería inyectiva. Se sigue que la acción de  $G$  es propia.

Por otro lado, probemos que si  $\pi$  es una aplicación recubridora, entonces  $G$  es su grupo de transformaciones recubridoras. En efecto, cualquier  $g \in G$  es una transformación recubridora, pues  $\pi \circ g = \pi$  ya que la órbita de  $g(x)$  es igual a la de  $x$ .

También, sea  $h$  una transformación recubridora con  $h(x_1) = x_2$ , por ejemplo. Como  $\pi \circ h = \pi$ , los puntos  $x_1$  y  $x_2$  se aplican por  $\pi$  en el mismo punto; por tanto, existe  $g \in G$  tal que  $g(x_1) = x_2$ . La unicidad del teorema 2.1.1. implica entonces que  $h = g$ .

Para probar que  $\pi$  es regular, se observa que para dos puntos cualesquiera  $x_1$  y  $x_2$  en la misma órbita, existe  $g \in G$  tal que  $g(x_1) = x_2$ . Por último se aplicaría el corolario 2.2.1. para terminar la prueba. ■

**Teorema 2.2.3.** Si  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora y  $G$  es su grupo de transformaciones recubridoras, entonces existe un homeomorfismo  $k: X/G \rightarrow B$  tal que  $p = k \circ \pi$  donde  $\pi: X \rightarrow X/G$  es la aplicación proyección.

**Demostración.** Si  $g$  es una transformación recubridora, entonces  $p(g(x)) = p(x)$  por definición. Por tanto,  $p$  es constante sobre cada órbita, lo que induce una aplicación continua  $k$  del espacio cociente  $X/G$  en  $B$ . Por otro lado,  $p$  es una aplicación cociente porque es continua, sobreyectiva y abierta. Como  $p$  es regular, dos puntos cualesquiera de  $p^{-1}(b)$  están en la misma órbita bajo la acción de  $G$ . Por consiguiente,  $\pi$  induce una aplicación continua  $B \rightarrow X/G$ , que es la inversa de  $k$ . ■

**Ejemplo 2.2.3.** Sea  $X$  el cilindro  $S^1 \times I$ . Sean  $h, k: X \rightarrow X$  los homeomorfismos definidos por  $h(x, t) = (-x, t)$  y  $k(x, t) = (-x, 1 - t)$ . Los grupos  $G_1 = \{e, h\}$  y  $G_2 = \{e, k\}$  son isomorfos a  $\mathbb{Z}_2$  (conjunto de los enteros módulo 2) y ambos actúan propiamente discontinuamente sobre  $X$ . Además se puede comprobar que  $X/G_1$  es homeomorfo a  $X$ , mientras que  $X/G_2$  es homeomorfo a la cinta de Möbius. (Ver figura 10)



Figura 10

### 2.3. Existencia de espacios recubridores

**Definición 2.3.1.** Un espacio  $B$  se dice **semilocalmente simplemente conexo** si para cada  $b \in B$ , existe un entorno  $U$  de  $b$  tal que el homomorfismo  $i_*: \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$  inducido por la inclusión es trivial.

Observemos que si  $U$  satisface esta condición, también la satisface cualquier entorno más pequeño de  $b$ ; por tanto,  $b$  posee entornos arbitrariamente pequeños satisfaciendo esta condición.

El hecho que  $B$  sea semilocalmente simplemente conexo es condición necesaria y suficiente para que exista, para cada clase de conjugación de subgrupos de  $\pi_1(B, b)$ , un correspondiente espacio recubridor de  $B$ . La condición necesaria se probó en el lema 2.1.4.; la suficiencia se verá en esta sección.

**Teorema 2.3.1.** Sea  $B$ , conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Sea  $b_0 \in B$ . Dado un subgrupo  $H$  de  $\pi_1(B, b_0)$  existen una aplicación recubridora  $p: E \rightarrow B$  y un punto  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$  tales que

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$$

**Demostración.**

**PASO 1: Construcción de  $E$ .** Sea  $P$  el conjunto de todos los caminos en  $B$  que parten de  $b_0$ . Se define una relación de equivalencia en  $P$  colocando  $\alpha \sim \beta$  si  $\alpha$  y  $\beta$  acaban en el mismo punto de  $B$  y  $[\alpha * \bar{\beta}] \in H$ . La clase de equivalencia del camino  $\alpha$  se indicará por  $\alpha^\#$ .

Sea  $E$  la colección de las clases de equivalencia y definamos  $p: E \rightarrow B$  por la ecuación  $p(\alpha^\#) = \alpha(1)$ . Como  $B$  es conexo por caminos,  $p$  es sobreyectiva. Dotaremos a  $E$  de una topología de manera que  $p$  sea una aplicación recubridora.

Por otro lado, observemos que se cumple lo siguiente:

- 1) Si  $[\alpha] = [\beta]$ , entonces  $\alpha^\# = \beta^\#$ . Pues de la igualdad  $[\alpha] = [\beta]$ , se sigue que  $[\alpha * \bar{\beta}]$  es el elemento neutro, el cual pertenece a  $H$ .
- 2) Si  $\alpha^\# = \beta^\#$ , entonces  $(\alpha * \delta)^\# = (\beta * \delta)^\#$ , para cualquier camino  $\delta$  en  $B$  partiendo de  $\alpha(1)$ . En efecto, basta con observar que  $\alpha * \delta$  y  $\beta * \delta$  acaban en el mismo punto de  $B$  y

$$[(\alpha * \delta) * (\overline{\beta * \delta})] = [(\alpha * \delta) * (\bar{\delta} * \bar{\beta})] = [\alpha * \bar{\beta}]$$

que pertenece a  $H$  por hipótesis.

**PASO 2. Definir una topología sobre  $E$ .** Sean  $\alpha$  un elemento cualquiera de  $P$  y  $U$ , un entorno conexo por caminos de  $\alpha(1)$ . Se define:

$$B(U, \alpha) = \{(\alpha * \delta)^\# / \delta \text{ es un camino en } U \text{ partiendo de } \alpha(1)\}$$

Observemos que  $\alpha^\#$  es un elemento de  $B(U, \alpha)$ , ya que si  $b = \alpha(1)$  entonces  $\alpha^\# = (\alpha * e_b)^\#$ ; por definición, este elemento pertenece a  $B(U, \alpha)$ . Afirmamos que los conjuntos  $B(U, \alpha)$  forman una base para la topología sobre  $E$ .

Primero probemos que si  $\beta^\# \in B(U, \alpha)$ , se tiene que  $\alpha^\# \in B(U, \beta)$  y  $B(U, \alpha) = B(U, \beta)$ .

Si  $\beta^\# \in B(U, \alpha)$ , entonces  $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$  para algún camino  $\delta$  en  $U$ . Entonces

$$\begin{aligned} (\beta * \bar{\delta})^\# &= ((\alpha * \delta) * \bar{\delta})^\# && \text{por 2)} \\ &= \alpha^\# && \text{por 1)} \end{aligned}$$

de manera que  $\alpha^\# \in B(U, \beta)$  por definición (Ver figura 11). En primer lugar, demostremos que  $B(U, \beta) \subset B(U, \alpha)$ . Nótese que el elemento general de  $B(U, \beta)$  es de la forma  $(\beta * \gamma)^\#$ , donde  $\gamma$  es un camino en  $U$ . Entonces se tiene que:

$$(\beta * \gamma)^\# = ((\alpha * \delta) * \gamma)^\# = (\alpha * (\delta * \gamma))^\#$$

que pertenece a  $B(U, \alpha)$  por definición. Por simetría se tiene la inclusión  $B(U, \alpha) \subset B(U, \beta)$ .

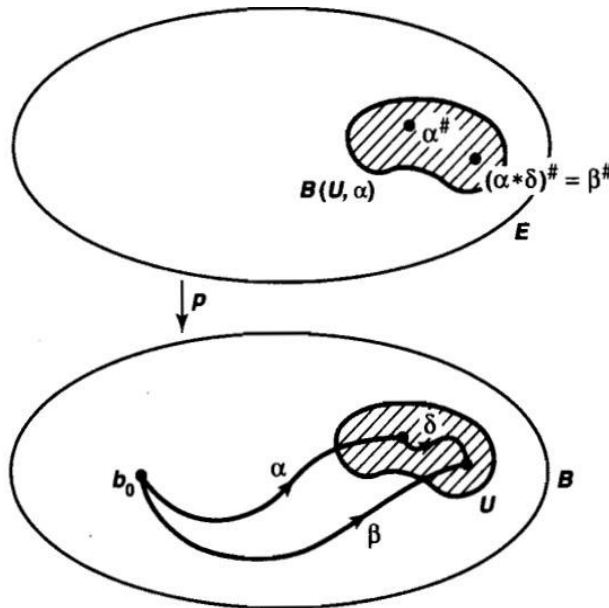


Figura 11

Ahora demostremos que los conjuntos  $B(U, \alpha)$  forman una base. Si  $\beta^\#$  pertenece a la intersección  $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$ , solo necesitamos conocer un entorno conexo por caminos  $V$  de  $\beta(1)$  contenido en  $U_1 \cap U_2$ . La inclusión:  $B(V, \beta) \subset B(U_1, \beta) \cap B(U_2, \beta)$ , se sigue de la definición de estos conjuntos, entonces se tiene:  $B(U_1, \beta) \cap B(U_2, \beta) = B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$  por el resultado que acabamos de probar.

Por lo tanto los conjuntos  $B(U, \alpha)$  forma una base de una topología en  $E$ .

**PASO 3. La aplicación  $p$  es continua y abierta.** La imagen del elemento básico  $B(U, \alpha)$  es el subconjunto abierto  $U$  de  $B$ : dado  $x \in U$ , elegimos un camino  $\delta$  en  $U$  desde  $\alpha(1)$  hasta  $x$ , entonces  $(\alpha * \delta)^\#$  está en  $B(U, \alpha)$  y  $p((\alpha * \delta)^\#) = x$ . Por tanto,  $p$  es abierta.

Para ver que  $p$  es continua, tomemos un elemento  $\alpha^\#$  de  $E$  y un entorno  $V$  de  $p(\alpha^\#)$ . Elijamos un entorno conexo por caminos  $U$  del punto  $p(\alpha^\#) = \alpha(1)$  tal que  $U \subset V$ . Entonces  $B(U, \alpha)$  es un entorno de  $\alpha^\#$  tal que  $p(B(U, \alpha)) \subset V$ . De este modo,  $p$  es continua en  $\alpha^\#$ .

**PASO 4. Cada punto de  $B$  tiene un entorno que está regularmente cubierto por  $p$ .**

Dado  $b_1 \in B$ , tomemos  $U$  un entorno conexo por caminos de  $b_1$  que satisface la condición adicional de que el homomorfismo  $\pi_1(U, b_1) \rightarrow \pi_1(B, b_1)$  inducido por la inclusión es trivial. Afirmamos que  $U$  está regularmente cubierto por  $p$ .

Primero, probemos que  $p^{-1}(U)$  es igual a la unión de los conjuntos  $B(U, \alpha)$ , cuando  $\alpha$  recorre todos los caminos en  $B$  de  $b_0$  a  $b_1$ . Como  $p$  aplica cada conjunto  $B(U, \alpha)$  sobre  $U$ , está claro que  $p^{-1}(U)$  contiene la unión. Por otro lado, si  $\beta^\# \in p^{-1}(U)$ , entonces  $\beta(1) \in U$ . Escojamos un camino  $\delta$  en  $U$  desde  $b_1$  hasta  $\beta(1)$  y sea  $\alpha$  el camino  $\beta * \bar{\delta}$  de  $b_0$  a  $b_1$ . Entonces  $[\beta] = [\alpha * \delta]$ , de manera que  $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$ , que pertenece a  $B(U, \alpha)$ . Así  $p^{-1}(U)$  está contenido en la unión de los conjuntos  $B(U, \alpha)$ .

Segundo. Observemos que los distintos conjuntos  $B(U, \alpha)$  son disjuntos. Pues si  $\beta^\# \in B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$ , entonces  $B(U_1, \alpha_1) = B(U, \beta) = B(U_2, \alpha_2)$ , por el paso 2.

Tercero. Probemos que  $p$  define una aplicación biyectiva entre  $B(U, \alpha)$  y  $U$ . Se sigue que  $p|_{B(U, \alpha)}$  es un homeomorfismo, siendo biyectiva, continua y abierta. Sabiendo que  $p$  aplica  $B(U, \alpha)$  sobre  $U$ , para probar la inyectividad, supongamos que

$$p((\alpha * \delta_1)^\#) = p((\alpha * \delta_2)^\#), \quad \delta_1 \text{ y } \delta_2 \in U$$

Entonces  $\delta_1(1) = \delta_2(1)$ . Como el homomorfismo  $\pi_1(U, b_1) \rightarrow \pi_1(B, b_1)$  inducido por la inclusión es trivial,  $\delta_1 * \bar{\delta}_2$  es un camino homotópico en  $B$  al lazo constante. Entonces  $[\alpha * \delta_1] = [\alpha * \delta_2]$ , de modo que  $(\alpha * \delta_1)^\# = (\alpha * \delta_2)^\#$ , como se deseaba probar.

**PASO 5. Levantamiento de un camino en  $B$ .** Sea  $e_0$  la clase de equivalencia del camino constante en  $b_0$ , entonces  $p(e_0) = b_0$  por definición. Dado un camino  $\alpha$  en  $B$  partiendo de  $b_0$ , calculamos su levantamiento a un camino en  $E$  partiendo de  $e_0$  y probamos que este levantamiento acaba en  $\alpha^\#$ .

Dado  $c \in [0, 1]$ , sea  $\alpha_c: I \rightarrow B$  el camino definido por la ecuación

$$\alpha_c(t) = \alpha(tc), \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces  $\alpha_c$  es la “porción” de  $\alpha$  que va de  $\alpha(0)$  a  $\alpha(c)$ . En particular,  $\alpha_0$  es el camino constante en  $b_0$  y  $\alpha_1$  es el propio camino  $\alpha$ . Definimos  $\tilde{\alpha}: I \rightarrow E$  por la ecuación

$$\tilde{\alpha}(c) = (\alpha_c)^\#$$

y probamos que  $\tilde{\alpha}$  es continua. Entonces  $\tilde{\alpha}$  es un levantamiento, puesto que  $p(\tilde{\alpha}(c)) = \alpha_c(1) = \alpha(c)$ ; además,  $\tilde{\alpha}$  comienza en  $(\alpha_0)^\# = e_0$  y acaba en  $(\alpha_1)^\# = \alpha^\#$ .

Para estudiar la continuidad de  $\tilde{\alpha}$ , introducimos la siguiente definición. Si  $[a, b]$  y  $[c, d]$  son dos intervalos en  $\mathbb{R}$ , existe una única aplicación  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  de la forma  $f(x) = mx - k$  que lleva “a” a “c” y “b” a “d”, denominada **aplicación lineal positiva** de  $[a, b]$  a  $[c, d]$ , porque su gráfica es una línea recta con pendiente positiva. La inversa y composición de aplicaciones lineales positivas es también una aplicación de este tipo.

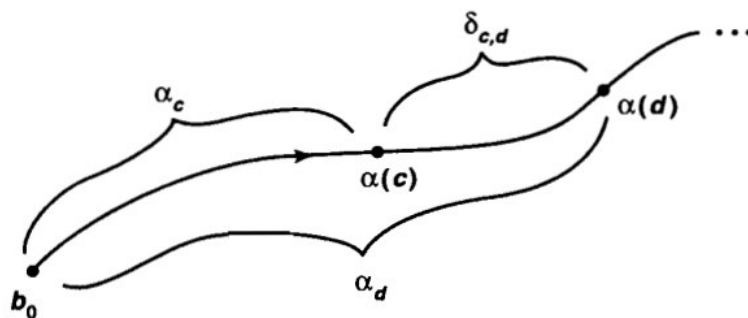


Figura 12

Ahora introducimos la siguiente notación: Dados  $0 \leq c < d \leq 1$ , sea  $\delta_{c,d}$  el camino que es igual a la aplicación lineal positiva de  $I$  sobre  $[c, d]$  compuesta con  $\alpha$ . Se observa que los caminos  $\alpha_d$  y  $\alpha_c * \delta_{c,d}$  son homotópicos porque uno es justamente una reparametrización del otro. (Ver figura 12)

Verifiquemos ahora la continuidad de  $\tilde{\alpha}$  en el punto  $c$  de  $[0, 1]$ . Sea  $W$  un elemento básico en  $E$  alrededor del punto  $\tilde{\alpha}(c)$ . Entonces  $W = B(U, \alpha_c)$  para algún entorno conexo por caminos  $U$  de  $\alpha(c)$ . Elijamos  $\varepsilon > 0$  tal que para  $|c - t| < \varepsilon$ , el punto  $\alpha(t)$  esté en  $U$ . Por tanto necesitamos probar que si  $d$  es un punto de  $[0, 1]$  que satisface  $|c - d| < \varepsilon$ , entonces  $\tilde{\alpha}(d) \in W$ .

Supongamos pues que  $|c - d| < \varepsilon$ . Tomemos en primer lugar el caso que  $d > c$ . Sea  $\delta = \delta_{c,d}$ ; entonces como  $[\alpha_d] = [\alpha_c * \delta]$ , se tiene:

$$\tilde{\alpha}(d) = (\alpha_d)^\# = (\alpha_c * \delta)^\#.$$

Como  $\delta$  está en  $U$ , tenemos que  $\tilde{\alpha}(d) \in B(U, \alpha_c) = W$ , como deseábamos. Si  $d < c$ , denotemos  $\delta = \delta_{d,c}$  y procedemos de forma análoga.

**PASO 6. La aplicación  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora.** Solo es necesario verificar que  $E$  es conexo por caminos. Si  $\alpha^\#$  es un punto cualquiera de  $E$ , entonces el levantamiento  $\tilde{\alpha}$  del camino  $\alpha$  es un camino en  $E$  de  $e_0$  a  $\alpha^\#$ .

**PASO 7. Por último,  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ .** Sea  $\alpha$  un lazo en  $B$  basado en  $b_0$ . Sea  $\tilde{\alpha}$  su levantamiento a  $E$  partiendo de  $e_0$ . El teorema 1.4.4. asegura que  $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$  si y solo si  $\tilde{\alpha}$  es un lazo en  $E$ . El punto final de  $\tilde{\alpha}$  es el punto  $\alpha^\#$ ;  $\alpha^\# = e_0$  si y solo si es equivalente al lazo constante en  $b_0$ , es decir, si y solo si  $[\alpha * \bar{e}_{b_0}] \in H$ . Esto sucederá precisamente cuando  $[\alpha] \in H$ . ■

## 2.4 Equivalencia de espacios recubridores

En esta sección probaremos que el subgrupo  $H_0$  de  $\pi_1(B, b_0)$  determina completamente el recubridor  $p: E \rightarrow B$ , salvo una adecuada noción de equivalencia de recubridores.

**Definición 2.4.1.** Sean  $p: E \rightarrow B$  y  $q: E' \rightarrow B$  aplicaciones recubridoras. Diremos que son **equivalentes** si existe un homeomorfismo  $h: E \rightarrow E'$  tal que  $p = q \circ h$ . El homeomorfismo  $h$  se denomina **equivalencia de aplicaciones recubridoras** o equivalencia de espacios recubridores.

**Teorema 2.4.1.** Sean  $p: E \rightarrow B$  y  $q: E' \rightarrow B$  aplicaciones recubridoras; sea  $p(e_0) = q(e'_0) = b_0$ . Existe una equivalencia  $h: E \rightarrow E'$  tal que  $h(e_0) = e'_0$  si y solo si, los grupos

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad \text{y} \quad H'_0 = q_*(\pi_1(E', e'_0))$$

son iguales. Si  $h$  existe, es única.

**Demostración.** El hecho de que  $h$  sea un homeomorfismo implica que

$$h_*(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1(E', e'_0)$$

Como  $q \circ h = p$ , se tiene que  $H_0 = H'_0$ .

Recíprocamente, suponemos  $H_0 = H'_0$  y probemos que  $h$  existe. Aplicaremos el lema 2.1.1. Se consideran las aplicaciones:  $p: E \rightarrow B$  y  $q: E' \rightarrow B$ . Como  $q$  es una aplicación recubridora y  $E$  es conexo por caminos y localmente conexo por caminos, existe una aplicación  $h: E \rightarrow E'$  con  $h(e_0) = e'_0$ , que es un levantamiento de  $p$ . Análogamente, vemos que existe una aplicación  $k: E' \rightarrow E$  con  $k(e'_0) = e_0$ , tal que  $p \circ k = q$ .

La aplicación  $k \circ h: E \rightarrow E$  es un levantamiento de  $p$ , con  $p(e_0) = e_0$ . La aplicación identidad  $i_E$  de  $E$  es otro de tales levantamientos. De la unicidad del lema 2.1.1. se tiene que  $k \circ h = i_E$ . De manera análoga se obtiene  $h \circ k = i_{E'}$ . ■

**Lema 2.4.1.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Sean  $e_0$  y  $e_1$  puntos de  $p^{-1}(b_0)$  y  $H_i = p_*(\pi_1(E, e_i))$ .

- Si  $\gamma$  es un camino en  $E$  de  $e_0$  a  $e_1$  y  $\alpha$  es el lazo  $p \circ \gamma$  en  $B$ , entonces se satisface la ecuación  $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$ ; por consiguiente,  $H_0$  y  $H_1$  son conjugados.
- Recíprocamente, dados  $e_0$  y un subgrupo  $H$  de  $\pi_1(B, b_0)$  conjugado de  $H_0$ , existe un punto  $e_1$  de  $p^{-1}(b_0)$  tal que  $H_1 = H$ .



**Demostración.** De a), probemos  $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0$ . Dado un elemento  $[h]$  de  $H_1$ , se tiene que  $[h] = p_*([h])$  para algún lazo  $h$  en  $E$  basado en  $e_1$ . Sea  $k$  el camino  $(\gamma \circ h) \circ \tilde{\alpha}$ , el cual es un lazo en  $E$  basado en  $e_0$  y

$$p_*([k]) = [(\alpha * h) * \bar{\alpha}] = [\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1}.$$

Así, el último elemento pertenece a  $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$ . (Ver figura 13)

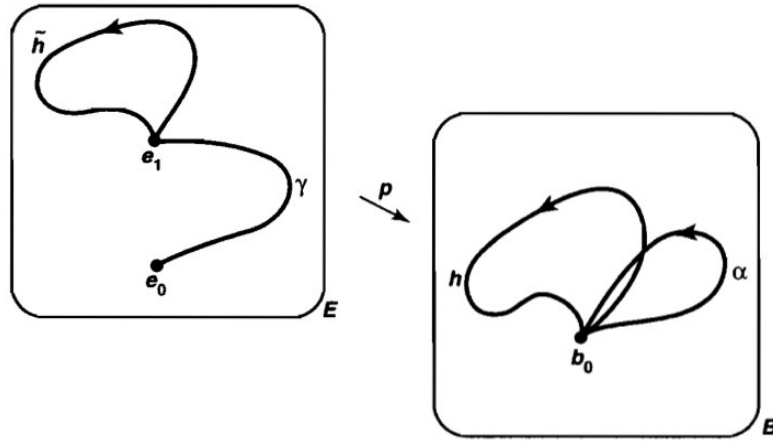


Figura 13

Ahora probaremos que  $H_0 \subset [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$ .  $\bar{\gamma}$  es un camino de  $e_1$  a  $e_0$  y  $\bar{\alpha}$  es igual al lazo  $p \circ \bar{\gamma}$ . Por el resultado que se acaba de probar se tiene  $[\bar{\alpha}] * H_0 * [\bar{\alpha}]^{-1} \subset H_1$ , que era lo que queríamos demostrar.

Para probar b), sean  $e_0$  un punto dado y  $H$ , conjugado de  $H_0$ . Entonces  $[\alpha] * H * [\alpha]^{-1} = H_0$ , para algún lazo  $\alpha$  en  $B$  basado en  $b_0$ .

Sea  $\gamma$  el levantamiento de  $\alpha$  a un camino en  $E$  partiendo de  $e_0$  y sea  $e_1 = \gamma(1)$ . Entonces

a) implica que  $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$ . Se concluye que  $H = H_1$ . ■

**Teorema 2.4.2.** Sean  $p: E \rightarrow B$  y  $q: E' \rightarrow B$  aplicaciones recubridoras; sea  $p(e_0) = q(e'_0) = b_0$ . Las aplicaciones recubridoras  $p$  y  $q$  son equivalentes si y solo si, los subgrupos

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad \text{y} \quad H'_0 = q_*(\pi_1(E', e'_0))$$

de  $\pi_1(B, b_0)$  son conjugados.

**Demostración.** Si  $h: E \rightarrow E'$  es una equivalencia, sean  $e'_1 = h(e_0)$  y  $H'_1 = p_*(\pi_1(E', e'_1))$ . El teorema 2.4.1. implica que  $H_0 = H'_1$ , mientras que el lema anterior nos dice que  $H'_1$  es el conjugado de  $H_0$ .

Recíprocamente, si los grupos  $H_0$  y  $H'_1$  son conjugados, el lema anterior implica la existencia de un punto  $e'_1$  de  $E'$  tal que  $H'_1 = H_0$ . El teorema 2.4.1. nos brinda entonces, una equivalencia  $h: E \rightarrow E'$  tal que  $e'_1 = h(e_0)$ . ■

**Teorema 2.4.3.** El espacio  $B$  tiene un espacio recubridor universal si y solo si,  $B$  es conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo.

**Demostración.** Si  $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  es una aplicación recubridora universal de  $B$ , entonces el grupo  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$  es el subgrupo trivial de  $\pi_1(B, b_0)$ . Por el teorema 2.4.2. se tiene además que  $B$  es semilocalmente simplemente conexo.

Recíprocamente, aplicamos el teorema 2.3.1. para construir una aplicación recubridora  $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  tal que  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$  es el subgrupo trivial de  $\pi_1(B, b_0)$ . Como  $p_*$  es inyectiva, tenemos que  $E$  es simplemente conexo y por tanto,  $p$  es una aplicación recubridora universal de  $B$ . ■

## Conclusiones

Con el presente trabajo se pudo comprobar la importancia del Grupo Fundamental en el estudio de un espacio topológico dado en cuanto a sus propiedades y relación con otros espacios. En particular, en el estudio de sus Espacios de Recubrimiento que, a través del Grupo Fundamental, da respuestas a preguntas como: ¿Bajo qué condiciones para un espacio dado, se puede garantizar la existencia de un espacio recubridor? O ¿Cuántos espacios recubridores puede tener? Las Clases de Conjugación del Grupo Fundamental de un espacio determinan las clases de equivalencia de los recubridores.

El estudio de los Espacios de Recubrimiento aparece en el marco que, para estudiar un espacio dado, en ocasiones no resulta fácil, pero se puede conocer algunas de sus propiedades estudiando el espacio que lo recubre. El concepto de Espacio Recubridor formaliza la idea de un espacio topológico que envuelve una o varias veces a otro espacio.

## Bibliografía

- [1] MUNKRES. J. R. *Topología*. Segunda edición. Prentice Hall. Madrid, 2000.
- [2] KOSNIOWSKI. C. *Topología Algebraica*. Editorial Reverté. Barcelona, 1986
- [3] MASSEY. W. S. *Introducción a la topología algebraica*. Editorial Reverté. Barcelona, 2006.
- [4] SPANIER. E. H. *Algebraic Topology*, McGraw-Hill. Nueva York, 1966.
- [5] LIMA. E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. IMPA. Río de Janeiro, 1993.